الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى

نجية محمد عيسى أبوجلاله
قسم الرياضيات ، كلية العلوم، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا
Correspondance:nnmea.mly@gmail.com

الملخص:
تهدف هذه الورقة إلى دراسة الطرق التحليلية لإيجاد الحل التام للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى وهي :
طريقة المميزات لكوشي (Cauchy's method of characteristics) ، طريقة شاربي أو شاربت (Charper's method) وطريقة جاكوبي (Jacobi's method) من حيث استنتاج الطريقة وتطبيقها على بعض الأمثلة وقد رأيت أن طريقة كوشي تعتبر الأساس لباقي الطرق ، وتستلزم هذه الطريقة منحنى ابتدائي معطى ، أما في حالة عدم وجود هذا المنحنى يتم استخدام طريقة تشاربي و بشكل خاص درست طريقة جاكوبي لسهولة تعميمها إلى معادلة تفاضلية في $2n$ من المتغيرات على الصورة التالية :

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n) = 0$$

والمعادلات المرافقة تكون :

$$\frac{dx_1}{f_{u_1}} = \frac{dx_2}{f_{u_2}} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{f_{u_n}} = \frac{du_1}{-f_{x_1}} = \frac{du_2}{-f_{x_2}} = \cdots\cdots = \frac{du_n}{-f_{x_n}}$$

وتقديم بعض الملاحظات إضافة إلي التعاريف والمفاهيم اللازمة .

كلمات مفتاحية : معادلة تفاضلية جزئية غير خطية من الرتبة الأولى ، طريقة المميزات لكوشي ، القطاع المميز ، المعادلات المميزة ، طريقة شاربت ، طريقة جاكوبي ، معادلات متكافئة .

المقدمة

بدأت دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية في القرن الثامن عشر ميلادي مع نخبة من الباحثين أمثال أويلر (Euler) ، دالامبير (Dalembert) ، لاجرانج (Lagrange) التي تظهر في المسائل المتعلقة بالصوت والحرارة وتدفق الموائع والمرونة وغيرها ونتيجة لأهمية الدور الكبير الذي تلعبه المعادلات التفاضلية الجزئية ولمعرفة حل الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية بأسلوب رياضي متقدم كان لابد من إيجاد طرق أكثر سهولة وشمولية في إيجاد حلولها ، فجاءت فكرة هذه الورقة التي بعنوان الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى التي تفيد في حل الكثير من المسائل ذات العلاقة .
حيث استخدمت طريقة المميزات لكوشي وطريقة شاربت ومن ثم تطرقت لطريقة جاكوبي وأساس هذه الطرق هو اختزال المعادلة الجزئية غير الخطية إلى منظومة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولي يسهل التعامل معها .

تعريفات و مصطلحات هامة [3]

المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى

Nonlinear partial differential equation of the first order

هي المعادلة التي تكون صورتها العامة في المتغيرين المستقلين x, y و المتغير التابع z كما يلي :

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

حيث f ليست بالضرورة خطية في p, q و $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

ويمكن تصنيف ثلاثة فئات من الحلول للمعادلة التفاضلية (1) :

1- منظومة سطوح ذات وسيطين :

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

ويسمى بالحل التام للمعادلة التفاضلية (1) .

2- منظومة سطوح ذات وسيط واحد :

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

حيث $\varphi(a)$ دالة اختيارية ويسمى بالحل العام للمعادلة (1) وعندما تكون $\varphi(a)$ محددة فإنه يمكن الحصول على حالة خاصة من الحل العام وظرف الحل العام يكون حلا خاصا للمعادلة (1).

3- الحل المفرد :
إذا كان ظرف الحل التام موجود فإنه يكون الحل أو التكامل المفرد للمعادلة (1).
المعادلات التفاضلية الجزئية المتكافئة Equivalent partial differential equation :

يقال عن المعادلتين $g(x,y,z,p,q)=0$, $f(x,y,x,p,q)=0$ أنهما متكافئتان إذا تحقق الشرط :

$$[f,g]=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)}+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,q)}+p\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,p)}+q\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,q)}=0$$

توجد عدة طرق لإيجاد الحل التام للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ومن أهمها :

أ- طريقة المميزات لكوشي* Cauchy's method of characteristics [1]
تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلة التفاضلية غير الخطية على الصورة التالية :

$$f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad (1)$$

التي تكتب أيضا على الصورة :

$$f(x,y,z,p,q)=0\,;p=\frac{\partial z}{\partial x}\ \ ,\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2)$$

أي فئة من الدوال الخمسة :

$$\{x(t),y(t),z(t),p(t),q(t)\}$$

تحقق المعادلة

$$\acute{z}(t)=p(t)\acute{x}(t)+q(t)\acute{y}(t)$$

تعرف قطاع عند النقطة $(x\ ,y\ ,z)$على المنحنى C الذي معادلته الوسيطية

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

لكل قيم t على فترة ملائمه ولتكن I ، وإذا كان عند كل نقطة المنحنى C يمس المخروط الإبتدائي فإن القطاع المناظر يكون قطاعا مميزا.
ويمكن اشتقاق معادلات القطاع المميز كما يلي:
التفاضل الكلي لـ z يكون:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

أو

$$dz=pdx+qdy \qquad (3)$$

حيث $p\ ,q$ تحقق المعادلة (2) وبتفاضل المعادلة (3) بالنسبة لـ p :

$$0=dx+\frac{dq}{dp}dy \quad\Rightarrow\quad \frac{dq}{dp}=-\frac{dx}{dy} \qquad (4)$$

وبتفاضل المعادلة (2) بالنسبة لـ p :

$$f_p+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dp}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \frac{dq}{dp}=-\frac{f_p}{f_q} \qquad (5)$$

وهذا يتضمن :

$$\frac{dx}{f_p}=\frac{dy}{f_q} \qquad\Rightarrow\qquad dx=\frac{f_p}{f_q}dy \qquad (6)$$

وبالتعويض عن dx في المعادلة (3) نجد أن:

$$dz = p\frac{f_p}{f_q}dy + qdy \qquad \Longrightarrow \qquad dz = \left(\frac{pf_p + qf_q}{f_q}\right)dy$$

أي أن:

$$\frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dy}{f_q} \qquad (7)$$

من المعادلتين (6) ، (7) واضح أن :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} \qquad (8)$$

(*) أوغستين لويس كوشي (1789-1857) عالم رياضيات فرنسي ولد في باريس ، وضع أسس التحليل بدلالة النهايات والإستمرار وطور نظرية الدوال وأسهم في طريقة تكامل المعادلات التفاضلية الخطية .

لذلك على استطالة القطاع المميز المشتقات $\acute{z}(t)$ ، $\acute{y}(t)$ ، $\acute{x}(t)$ يجب أن تكون متناسبة مع $f_p\,,\ f_q\,, pf_p + qf_q$ على التوالي.

وإذا اخترنا الوسيط t على الصورة التالية :

$$\acute{x}(t) = f_p \qquad , \acute{y}(t) = f_q \qquad (9)$$

فإن :

$$\acute{z}(t) = pf_p + qf_q \qquad (10)$$

على استطالة القطاع المميز p تكون دالة في t وهكذا

$$\acute{p}(t) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

من المعادلتين في (9) نجد أن :

$$\acute{p}(t) = \frac{\partial p}{\partial x}f_p + \frac{\partial p}{\partial y}f_q$$

ولكن

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(q)$$

وهكذا

$$\acute{p}(t) = \frac{\partial p}{\partial x}f_p + \frac{\partial q}{\partial x}f_q \qquad (11)$$

وبتفاضل المعادلة (2) بالنسبة لـ x :

$$f_x + pf_z + f_p\frac{\partial p}{\partial x} + f_q\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

أو

$$f_p\frac{\partial p}{\partial x} + f_q\frac{\partial q}{\partial x} = -(f_x + pf_z) \qquad (12)$$

من المعادلتين (11) ، (12) نجد أن:

$$\acute{p}(t) = -(f_x + pf_z) \qquad (13)$$

وبالمثل:

$$\acute{q}(t) = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

من المعادلتين في (9) نجد أن :

$$\acute{q}(t) = \frac{\partial q}{\partial x} f_p + \frac{\partial q}{\partial y} f_q$$

ولكن

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(p)$$

و هكذا

$$\acute{q}(t) = \frac{\partial p}{\partial y} f_p + \frac{\partial q}{\partial y} f_q \qquad (14)$$

وبتفاضل المعادلة التفاضلية (2) بالنسبة لـ y :

$$f_y + q f_z + f_p \frac{\partial p}{\partial y} + f_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

أو

$$f_p \frac{\partial p}{\partial y} + f_q \frac{\partial q}{\partial y} = -(f_y + q f_z) \qquad (15)$$

من المعادلتين (14) ، (15) نجد أن:

$$\acute{q}(t) = -(f_y + q f_z) \qquad (16)$$

وبذلك نحصل على منظومة المعادلات التفاضلية العادية التي تحدد القطاع المميز للمعادلة (2) :

$$\acute{x}(t) = f_p \quad , \acute{y}(t) = f_q \quad , \acute{z}(t) = p f_p + q f_q$$
$$\acute{p}(t) = -(f_x + p f_z) \quad , \quad \acute{q}(t) = -(f_y + q f_z)$$

خوارزمية الحل:

لإيجاد حل المعادلة التفاضلية (1) الذي يمر خلال المنحنى C نتبع الآتي:

1- كتابة المعادلة على الصورة : $f(x, y, z, p, q) = 0$

2- إيجاد معادلات القطاع المميز :

$$\acute{x}(t) = f_p \quad , \acute{y}(t) = f_q \quad , \acute{z}(t) = p f_p + q f_q$$
$$\acute{p}(t) = -(f_x + p f_z) \quad , \quad \acute{q}(t) = -(f_y + q f_z)$$

3- إيجاد الشروط الابتدائية كما يلي :

أ- كتابة معادلة المنحنى الإبتدائي وسيطيا:

$$x_0 = x_0(v) \quad , \quad y_0 = y_0(v) \quad , \quad z_0 = z_0(v)$$

ب- القيمتان الإبتدائيتان p_0 , q_0 يمكن تحديدهما من المعادلتين :

$$\frac{dz_0}{dv} = p_0 \frac{dx_0}{dv} + q_0 \frac{dy_0}{dv}$$
$$f\{x_0(v), y_0(v), z_0(v), p_0, q_0\} = 0$$

4- تكامل معادلات القطاع المميز وإيجاد p, q, x, y بدلالة t, v

5- التعويض عن x, y, p, q في المعادلة :

$$\frac{dz}{dt} = p f_p + q f_q$$

وتكامل هذه المعادلة يعطي $z = z(v, t)$

6- بحذف t, v من المعادلات

$$x = x(v, t) \quad , \quad y = y(v, t) \quad , \quad z = z(v, t)$$

نحصل علي العلاقة $\varphi(x, y, z) = 0$ وهي معادلة السطح التكاملي للمعادلة (1) خلال المنحنى C.

ولتوضيح الطريقة نأخذ المثال التالي :

مثال : أوجد المعادلات المميزة للمعادلة $z = p^2 - q^2$ وأوجد السطح التكاملي الذي يمر بالقطاع المكافئ

$4z + x^2 = 0 \quad , \quad y = 0$

الحل

أولا : معادلات القطاع المميز :

بوضع : $f(x, y, x, p, q) = z - p^2 + q^2 = 0$ ومنها :

$$\frac{dx}{dt} = f_p = -2p \qquad , \qquad \frac{dy}{dt} = f_q = 2q$$

$$\frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q = -2(p^2 - q^2) = -2z$$

$$\frac{dp}{dt} = -(f_x + pf_z) = -p$$

$$\frac{dq}{dt} = -(f_y + qf_z) = -q$$

ثانيا : الشروط الإبتدائية

المعادلات البارامترية أو الوسيطية للقطاع المكافئ هي :

$$z_0 = -v^2 \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 2v$$

ويمكن تحديد p_0 , q_0 من المعادلتين التاليتين :

$$\frac{dz_0}{dv} = p_0\frac{dx_0}{dv} + q_0\frac{dy_0}{dv}$$

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = z_0 - {p_0}^2 + {q_0}^2 = 0$$

بالتعويض عن x_0 , y_0 , z_0 نحصل على :

$$-2v = p_0(2) + q_0(0)$$

$$-v^2 - {p_0}^2 + {q_0}^2 = 0$$

وهذا يتضمن $p_0 = -v$, ${q_0}^2 = 2v^2$ أو $q_0 = \mp\sqrt{2}\,v$

ثالثا : حل معادلات القطاع المميزبدلالة v , t

بفحص المعادلات المميزة نجد أن :

$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{dp}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2p + c$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نجد أن :

$$x = 2p + 4v \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad y = -2q + c$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نحصل على :

$$y = -2q - 2\sqrt{2}\, v \qquad (2)$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{dq}{dt} = -(p - q) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(p-q)}{p-q} = -dt$$

وبعد إجراء التكامل نحصل على العلاقة :

$$p - q = ce^{-t}$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية $(q_0 = -\sqrt{2}\, v)$

$$p - q = (\sqrt{2} - 1)ve^{-t} \qquad (3)$$

كذلك

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} = -(p + q) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(p+q)}{p+q} = -dt$$

وبتكامل المعادلة السابقة نحصل على :

$$p + q = ce^{-t}$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نجد أن :

$$p + q = -(1 + \sqrt{2})ve^{-t} \qquad (4)$$

رابعا : نوجد x, y, p, q بدلالة $v\ ,\ t$

يمكن الحصول على ذلك بحل منظومة المعادلات الآتية آنيا :

$$x - 2p = 4v$$

$$y + 2q = -2\sqrt{2}\, v$$

$$p - q = (\sqrt{2} - 1)ve^{-t}$$

$$p + q = -(1 + \sqrt{2})ve^{-t}$$

بجمع آخر معادلتين نحصل على :

$$2p = -2ve^{-t} \quad \Rightarrow \quad p = -ve^{-t}$$

وبطرح المعادلة الثالثة من الرابعة نجد أن :

$$q = -\sqrt{2}ve^{-t}$$

وبالتعويض عن p في المعادلة الأولى :

$$x = -2ve^{-t} + 4v \qquad (5)$$

وبالتعويض عن q في المعادلة الثانية :

$$y = 2\sqrt{2}ve^{-t} - 2\sqrt{2}v \qquad (6)$$

خامسا : نوجد حل المعادلة $\frac{dz}{dt} = -2z$:

وبعد إجراء التكامل نجد أن :

$$z = ce^{-2t}$$

وبتطبيق الشروط الإبتدائية نحصل على العلاقة التالية :

$$z = -v^2 e^{-2t} \qquad (7)$$

سادسا : نوجد t , v بدلالة $x \; , \; y$:

من المعادلتين (5) و (6) واضح أن :

$$y + \sqrt{2}x = 2\sqrt{2}v \qquad (8)$$

$$x + \sqrt{2}y = 2v\, e^{-t} \qquad (9)$$

من المعادلة (8) نجد أن :

$$v = \frac{y + \sqrt{2}x}{2\sqrt{2}}$$

ومن المعادلة (9) نحصل على :

$$e^{-t} = \frac{\sqrt{2}x + 2y}{y + \sqrt{2}x}$$

وبالتعويض عن $e^{-t} \;\; , \;\; v$ في المعادلة (7) نحصل على السطح المطلوب وهو :

$$4z + (x + \sqrt{2}y)^2 = 0$$

ب ـ طريقة تشاربت charper's method [2]:

في هذه الطريقة يمكن إيجاد الحل من منظومة المعادلات المميزة :

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}$$

وتكتب المعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة التالية :

$$f(x\,, y\,, z\,, p\,, q) = 0$$

المعادلات المميزة مكافئة أو تساوي الصورة المتماثلة لمعادلات القطاع المميز في طريقة المميزات لكوشي ويمكن توضيح ذلك كما يلي :

من معادلات القطاع المميز في طريقة المميزات لكوشي

$$\frac{dx}{dt} = f_p \Rightarrow \frac{dx}{f_p} = dt \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f_q \Rightarrow \frac{dy}{f_q} = dt$$

$$\frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q \Longrightarrow \frac{dz}{pf_p + qf_q} = dt$$

$$\frac{dp}{dt} = -(f_x + pf_z) \Longrightarrow \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = dt$$

$$\frac{dq}{dt} = -(f_y + qf_z) \Longrightarrow \frac{dq}{-(f_y + qf_z)} = dt$$

من المعادلات السابقة واضح أن:

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}$$

خوارزمية الحل :

1- إيجاد المعادلات المميزة للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه .

2 - إيجاد p/أو q أو كلاهما بدلالة المتغيرات $x\,, y\,, z$ أو بعضها أو إيجاد علاقة بينهما .

3- إذا وجدت $q\,, p$ بدلالة المتغيرين $x\,, y$ فقط فإنه يمكن الحصول على الحل التام بالتعويض عن $q\,, p$ في المعادلة التفاضلية الجزئية.

4- إذا وجدت p/أو q بدلالة المتغيرات $x\,, y\,, z$ فإنه يمكن الحصول على الحل التام بتكامل المعادلة :

$$dz = p(x, y, z)dx + q\,(x, y, z)dy$$

ولبيان الطريقة ندرس المثال التالي :

مثال : أوجد حل المعادلة الجزئية غير الخطية :

$$p^2 + yq - z = 0$$

الحل :

بوضع : $\quad f(x, y, z, p, q) = p^2 + yq - z = 0$

المعادلات المميزة تكون :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2p^2 + qy} = \frac{dp}{-(0-p)} = \frac{dq}{-(q + (-q))}$$

من النسبة الأولى والتانية من اليمين :

$$\frac{dq}{0} = \frac{dp}{p} \qquad \Longrightarrow dq = 0$$

وبتكامل نجد أن : $\quad q = a$

وبالتعويض عن q في المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$p^2 + ay - z = 0 \qquad \Longrightarrow \quad p = (z - ay)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض عن q , p في المعادلة :

$$dz = pdx + qdy$$

نحصل على المعادلة التالية :

$$dz = (z - ay)^{\frac{1}{2}} dx + ady$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي :

$$\frac{dz - ady}{(z - ay)^{\frac{1}{2}}} = dx$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن :

$$2(z - ay)^{\frac{1}{2}} = x + b$$

وهو الحل المطلوب .

ج- طريقة جاكوبي* Jacobi's method [3] **:**

طريقة جاكوبي لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

تعتمد علي أنه إذا كان

$$u(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

بتفاضل المعادلة (2) بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$u_x + u_z z_x = 0$$

أو

$$p = z_x = -\frac{u_x}{u_z} \qquad (3)$$

و بتفاضل المعادلة (2) بالنسبة للمتغير y نحصل علي العلاقة التالية :

$$u_y + u_z z_y = 0$$

أو

$$q = z_y = -\frac{u_y}{u_z} \qquad (4)$$

من المعادلتين (3)و(4) وبالتعويض في المعادلة (1) يمكن الحصول علي معادلة تفاضلية جزئية علي الصورة التالية :

$$f(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = 0 \qquad (5)$$

حيث أن $u_1 = u_x , u_2 = u_y , u_3 = u_z$ مع ملاحظة أن المتغير الجديد u لا يظهر في المعادلة (5)
في خوارزمية جاكوبي الفكرة الأساسية تكون باستخدام معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولي أي أن:

$$g(x, y, z, u_1, u_2, u_3, a) = 0 \qquad (6)$$
$$h(x, y, z, u_1, u_2, u_3, b) = 0 \qquad (7)$$

تشتملان علي تابتين اختياريين a و b حيث أن:

(أ) يمكن إيجاد u_1 , u_2 , u_3 من المعادلات (5) و (6) و (7) بصورة صريحة

(*) كارل جوستا جاكوبي (1804-1851) م عالم رياضيلت ألماني ولد بوسدام (postdam) كانت له اسهامات في تحويل التكاملات ونظرية المعادلات العامة والجزئية ، كما اهتم بنظرية المحددات التي مهدت السبيل للمحددات الدالية

(ب) المعادلة

$$du = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz \qquad (8)$$

تكون قابلة للتكامل

حل المعادلة (8) يشتمل علي ثلاثة ثوابت اختيارية ويكون حلا تاما للمعادلة (5)

ولكن إذا كان المطلوب حل المعادلة (1) فإنه يتطلب ثابتين اختياريين فقط في الحل النهائي.

الصعوبة الرئيسية تكمن في تحديد المعادلتين (6) و (7)

وهذا يتطلب إيجاد معادلتين متكافئتين مع المعادلة (5) وشرط التكافؤ[1] يكون:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,u_1)} + \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,u_2)} + \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,u_3)} = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial(f,h)}{\partial(x,u_1)} + \frac{\partial(f,h)}{\partial(y,u_2)} + \frac{\partial(f,h)}{\partial(z,u_3)} = 0 \qquad (10)$$

وبفك المحددات في (9) و (10) نجد أن:

$$f_{u_1}\frac{\partial g}{\partial x} + f_{u_2}\frac{\partial g}{\partial y} + f_{u_3}\frac{\partial g}{\partial z} - f_x\frac{\partial g}{\partial u_1} - f_y\frac{\partial g}{\partial u_2} - f_z\frac{\partial g}{\partial u_3} = 0$$

$$f_{u_1}\frac{\partial h}{\partial x} + f_{u_2}\frac{\partial h}{\partial y} + f_{u_3}\frac{\partial h}{\partial z} - f_x\frac{\partial h}{\partial u_1} - f_y\frac{\partial h}{\partial u_2} - f_z\frac{\partial h}{\partial u_3} = 0$$

علي التوالي وهذا يعني أن الدالتين g و h تحققان نفس المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية والمعادلات المرافقة تكون:

$$\frac{dx}{f_{u_1}} = \frac{dy}{f_{u_2}} = \frac{dz}{f_{u_3}} = \frac{du_1}{-f_x} = \frac{du_2}{-f_y} = \frac{du_3}{-f_z}$$

بعض الحالات الخاصة لطريقة جاكوبي :

1- إذا كانت المعادلة التفاضلية علي الصورة التالية :

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

ويمكن كتابة المعالة كما يلي :

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0 \qquad (1)$$

المعادلات المرافقة تكون :

$$\frac{dx}{f_{u_1}} = \frac{dy}{f_{u_2}} = \frac{dz}{f_{u_3}} = \frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{0} = \frac{du_3}{0}$$

من النسبة الثانية والثالثة من اليمين وأي نسبة أخرى نجد أن :

$$u_2 = b \ , \qquad u_1 = a \qquad (2)$$

من (2) وبالتعويض عن $u_1\ , u_2$ في المعادلة (1) نجد أن :–

$$u_3 = \varphi(\,a\,,b\,)$$

حيث a , b ثابتين اختياريين .

وبالتعويض عن $u_1\ ,\ u_2\,, u_3$ في المعادلة $du = \ u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz$ نحصل علي :

$$du = a\,dx + b\,dy + \varphi(\,a\,,b\,)\,dz$$

وبتكامل طرفي المعادلة نجد أن :

$$u = ax + by + \varphi(\,a\,,b\,)z + c$$

2- إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة التالية :

$$f\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = g\left(y, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

فإنه يمكن كتابة المعالة كما يلي :

$$f(x, u_1, u_3) = g(y, u_2, u_3)$$

المعادلات المرافقة تكون :

$$\frac{dx}{f_{u_1}} = \frac{dy}{-g_{u_2}} = \frac{dz}{f_{u_3} - g_{u_3}} = \frac{du_1}{-f_x} = \frac{du_2}{g_y} = \frac{du_3}{0}$$

من النسبة الأولى من اليمين وأي نسبة أخرى نجد أن :

$$du_3 = 0 \ \Rightarrow \quad u_3 = a$$

و من النسبة الثالتة والأخيرة من اليمين إلي اليسار نجد أن :

$$\frac{dx}{f_{u_1}} = \frac{du_1}{-f_x}$$

$$f_{u_1} du_1 + f_x dx = 0$$

وبتكامل المعادلة نجد أن :

$$f(x, u_1, u_3) = b$$

ولكن $u_3 = a$ أي أن :

$$f(x, u_1, a) = b$$

ومنها :

$$u_1 = \varphi(x, a, b)$$

وكذلك :

$$u_2 = \varphi(y, a, b)$$

وبالتعويض عن u_2 , u_3 , u_1 في المعادلة $du = u_1\, dx + u_2\, dy + u_3\, dz$ نحصل علي :

$$du = \varphi(x, a, b)\, dx + \varphi(y, a, b)\, dy + a\, dz$$

وبتكامل المعادلة نجد أن :

$$u = \int \varphi(x, a, b)\, dx + \int \varphi(y, a, b)\, dy + az + c$$

3- إذا كانت المعادلة الجزئية على الصورة التالية :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

فيمكن كتابة المعالة كما يلي :

$$g(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = xu_1 + yu_2 + zu_3 - f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

المعادلات المرافقة تكون :

$$\frac{dx}{g_{u_1}} = \frac{dy}{g_{u_2}} = \frac{dz}{g_{u_3}} = \frac{du_1}{-g_x} = \frac{du_2}{-g_y} = \frac{du_3}{-g_z}$$

و بالتعويض عن المشتقات الجزئية في المعادلات المرافقة نحصل علي :

$$\frac{dx}{x - f_{u_1}} = \frac{dy}{y - f_{u_2}} = \frac{dz}{z - f_{u_3}} = \frac{du_1}{-u_1} = \frac{du_2}{-u_2} = \frac{du_3}{-u_3}$$

ومن النسبة الأولى والثالثة من اليمين نجد أن :

$$\frac{du_3}{-u_3} = \frac{du_1}{-u_1}$$

وبإجراء عملية التكامل نحصل على:

$$u_1 = au_3$$

و من النسبة الأولى والثانية من اليمين نجد أن :

$$\frac{du_3}{-u_3} = \frac{du_2}{-u_2}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$u_2 = bu_3$$

وبالتعويض عن $u_1 \;,\; u_2 \,, u_3$ في المعادلة الأصلية نجد أن :

$$axu_1 + ybu_2 + zu_3 - f(a, b, u_3) = 0$$

ومنها :

$$u_3 = \varphi(x, y, z, a, b) \qquad (1)$$

و هكذا

$$u_1 = a\varphi(x, y, z, a, b) \;\;,\;\; u_2 = b\varphi(x, y, z, a, b)$$

وبالتعويض عن $u_1 \;,\; u_2 \,, u_3$ في المعادلة $du = u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz$ نحصل علي العلاقة التالية :

$$du = a\varphi\,dx + b\varphi\,dy + \varphi(x, y, z, a, b)\,dz$$

$$= \varphi d(ax + by + z) \qquad (2)$$

حيث أن $\emptyset$ معرفة كما في المعادلة (1) والمعادلة (2) تكون قابلة للتكامل .

ولتوضيح الطريقة ندرس المثال التالي :

مثال: أوجد التكامل "الحل" التام للمعادلة التالية :

$$2x^2y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial z} = x^2\frac{\partial u}{\partial y} + 2y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

الحل :

هذه المعالة يمكن كتابتها كما يلي :

$$2x^2yu_1{}^2u_3 = x^2u_2 + 2yu_1{}^2$$

وبإضافة $-2y\,u_1{}^2$ إلى طرفي المعالة السابقة نجد أن :

$$2x^2yu_1{}^2u_3 - 2yu_1{}^2 = x^2u_2$$

وبقسمة طرفي المعالة الأخيرة على $2x^2y$ نحصل على :

$$u_1{}^2\left(u_3-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2y}u_2$$

وهي مطابقة للحالة الثانية أي أن :

$$f(x,u_1,u_3)=u_1{}^2\left(u_3-\frac{1}{x^2}\right)$$

و

$$g(y,u_2,u_3)=\frac{1}{2y}u_2$$

وبالتالي فإن :

$$u_3=a$$

ومنها :

$$f(x,u_1,a)=b=u_1{}^2\left(a-\frac{1}{x^2}\right)$$

وهذا يتضمن أن :

$$u_1{}^2=\frac{bx^2}{ax^2-1}$$

وكذلك :

$$g(y,u_2,u_3)=b=\frac{1}{2y}u_2$$

ومنها :

$$u_2=2by$$

وبالتعويض عن $u_1\ ,\ u_2\ ,u_3$ في المعادلة $du=\ u_1\,dx+u_2\,dy+u_3\,dz$ نجد أن :

$$du=\frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{ax^2-1}}\,dx+2by\,dy+a\,dz$$

وبتكامل طرفي المعادلة نحصل على العلاقة التالية :

$$u=\frac{\sqrt{b}}{a}\,(ax^2-1)^{\frac{1}{2}}+by^2\ +az+c$$

وهي الحل التام للمعادلة المعطاه .

المراجع

1- Ian N. Sneddon , Elements of partial differential equations , McGraw- Hill book company ,Inc,New york , 1957.

2- Donald W.Trim , Applied partial differential equation , PWS-Kent Pub.Co.1990.

3- د. أحمد عبدالعالي هب الريح _ أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية – الجزء الأول – دار ومكتبة الشعب للنشر والتوزيع – الطبعة الأولى – 2004.

Analytical methods for solving nonlinear partial differential equations of the first order

Najieh Abojalalah
Correspondance *:nnmea.mly@gmail.com*

Abstract
This paper aims to study the analytical methods for finding a complete solution for the nonlinear partial differential equations of the first order :
Cauchy's method of characteristics , Charper's method , and Jacobi 's method in concluding the methods and appling them to some examples. Ihave seen that the Cauchy method is the basis for the other methods . This method requires a given initial curve,while in the absence of this curve Charper method is used. Was studied in particular for its easy generalization to a differential equation in 2n variables in the following form :

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n) = 0$$

The accompanying equations are:

$$\frac{dx_1}{f_{u_1}} = \frac{dx_2}{f_{u_2}} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{f_{u_n}} = \frac{du_1}{-f_{x_1}} = \frac{du_2}{-f_{x_2}} = \cdots\cdots = \frac{du_n}{-f_{x_n}}$$

And to provide some observations in addition to some necessary definitions and concepts .

Key words: Nonlinear partial differential equation of the first order, cauchy's method of characteristics, characteristic strip , characteristic equations , charper's method , jacobi's method , equivalent equations.